6-4-2016

Μάθημα 14ο

Παράδειγμα

Η εξίσωση $m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + \beta x^3$ αντιστοιχεί σε ένα μη-γραμμικό ελατήριο με τριβές ανάλογες της ταχύτητας. Η μέθοδος του πολλαπλασιασμού με $\dot{x}$ και ολοκλήρωση προφανώς αποτυγχάνει. Γιατί δημιουργείται ο όρος $c(\dot{x})^2$ που δεν ολοκληρώνεται

Παρατήρηση:

- Η αντικατάσταση $\dot{x} = w(x)$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}w(x) = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = w'\dot{x} = w'\cdot w$$

Συνεπώς:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + \beta x^3 \Rightarrow \boxed{mww' + cw = -kx + \beta x^3}$$

Αν είχαμε $(\dot{x})^2$ η αντικατάσταση θα ήταν

- $\dot{x} = \sqrt{w(x)}$

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκω τη $x = x(t)$

από $\frac{dx}{dt} = w(x) \Rightarrow \frac{dx}{w(x)} = dt$

Άσκηση:

Ν.Β. η $w(x)$.

Άλλος Τρόπος

Γράφω την εξίσωση σε μορφή συστήματος.

Θεωρώ: $\dot{x}=y$ και άρα:

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}\,(=\ddot{x}) = -\frac{c}{m}y-\frac{k}{m}x+\frac{\beta}{m}x^3 \end{cases}$$

Κρίσιμα σημεία/Ισορροπίας.

$$\begin{cases} y=0 \\ -\frac{c}{m}y-\frac{k}{m}x+\frac{\beta}{m}x^3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=0 \\ -\frac{k}{m}x+\frac{\beta}{m}x^3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x(-k+\beta x^2)=0 \end{cases}$$

⇝ Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι: $(0,0)$, $(-\sqrt{k/\beta},0)$, $(\sqrt{k/\beta},0)$

Παρατήρηση:

Το c δεν φαίνεται να επηρεάζει τα κρίσιμα σημεία. Γιατί?

↪ Αν $c=0$ το σύστημα είναι διατηρητικό

Δηλαδή $m\ddot{x}=-kx+\beta x^3$ ⇝ Πολλ/ζω με $\dot{x}$ και ολοκληρώνω.

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2=-k\,x^2/2+\beta\frac{x^4}{4}+E \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2+\underbrace{\left(k\frac{x^2}{2}-\beta\frac{x^4}{4}\right)}_{V(x)}=E$$

Παρατήρηση:

$V(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{2}\left(k-\beta\frac{x^2}{2}\right)=0$

Αν $m\ddot{x}=F(x)$

$F(x)=-\frac{dV}{dx}$

$F(x)=-kx+\beta x^3=\boxed{x(-k+\beta x^2)=-\frac{dV}{dx}}$ (Τα μέγιστα και τα ελάχιστα του δυναμικού αντιστοιχούν στα σημεία ισορροπίας)

- Βρίσκω ένα σύστημα:

$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y)\\ \dot{y}=g(x,y)\end{cases}$ και γραμμικοποιώ γύρω από τα σημεία ισορροπίας.

Ιακωβιανή ορίζω: $J=\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y\end{pmatrix}$

$f=y$

$g=-\frac{c}{m}y-\frac{k}{m}x+\frac{\beta}{m}x^3$

-

$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}+\frac{3\beta}{m}x^2 & -\frac{c}{m}\end{pmatrix}$

$J(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}\end{pmatrix}$, $J(\pm\sqrt{k/\beta},0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2k}{m} & -\frac{c}{m}\end{pmatrix}$

Ιδιοτιμές του $J(0,0)$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{m}(m\lambda^2+c\lambda+k)=0$$

Άρα $\lambda = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2-4km}}{2m}$

Παρατήρηση:
Δεν υπάρχει β!

1) Αν $c^2-4km>0$ σημείο συσσώρευσης
2) Αν $c^2-4km<0$ σπειροειδή συσσώρευση.

Ιδιοτιμές του $J(\pm\sqrt{k/\beta},0)$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{2k}{m} & -\frac{c}{m}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{m}(m\lambda^2+c\lambda-2k)=0$$

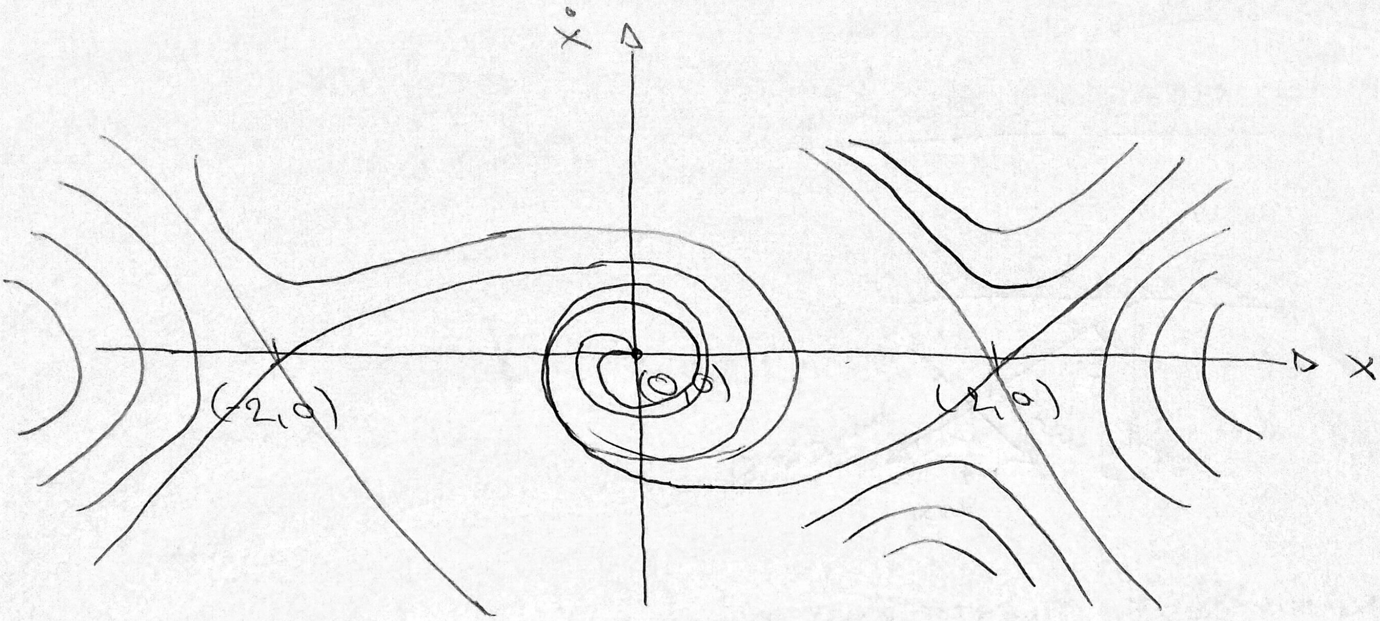
$$\Rightarrow \lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+8km}}{2m}$$

Αν $\lambda_1 = \dfrac{-c}{2m} + \dfrac{\sqrt{c^2+8km}}{2m} > 0$

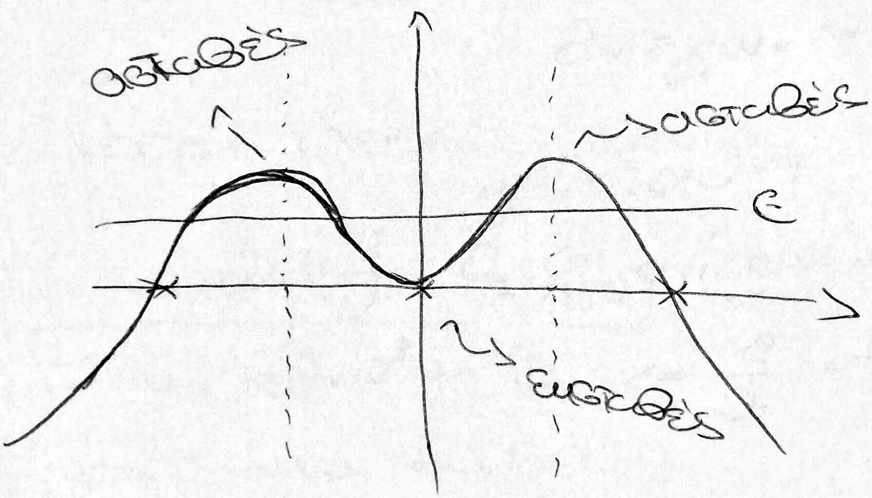
$\lambda_2 = \dfrac{-c}{2m} - \dfrac{\sqrt{c^2+8km}}{2m} < 0$

Ευσταθή σαγματικά σημεία.

Αν $m=1,\ c=2,\ k=5,\ \beta=\frac{5}{4}$, τότε:

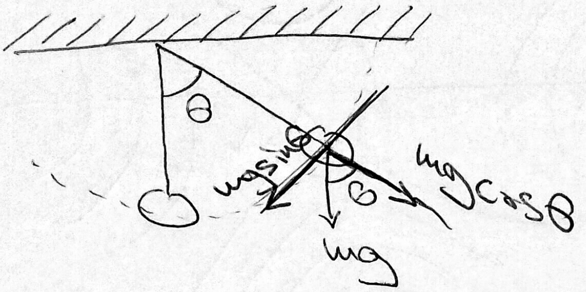


$$V(x) = +\alpha \frac{x^2}{2} - \beta \frac{x^4}{4} = -\frac{x^2}{2}\left(-\alpha + \frac{1}{2}\beta x^2\right)$$



Παράδειγμα

Το απλό εκκρεμές



Σε πολικές συντεταγμένες:

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta} \qquad 1)$$

Άρα:

$$(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})m = mg\sin\theta$$

Γνωρίζουμε ότι $r=l=$σταθερό

άρα $l\ddot{\theta}m=mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta}-\frac{g}{l}\sin\theta=0$

Θέτω $\omega^2=\frac{g}{l} \Rightarrow \ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta=0$

Θέτω

$\dot{\theta}=y$

Οπότε:

$$\begin{cases}\dot{\theta}=y\\ \dot{y}=\omega^2\sin\theta\end{cases}$$

⇝ Βρίσκω κρίσιμα σημεία.

$$\begin{cases} y=0 \\ \sin\theta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \theta=k\pi \end{cases}$$

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \quad \cos(k\pi)=(-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιο} \\ -1, & k \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$J(2k\pi,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J((2k+1)\pi,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ιδιοτιμές του $J(2k\pi,0)$:</u>

$\lambda^2+\omega^2=0$

άρα κέντρα κλειστών τροχιών.

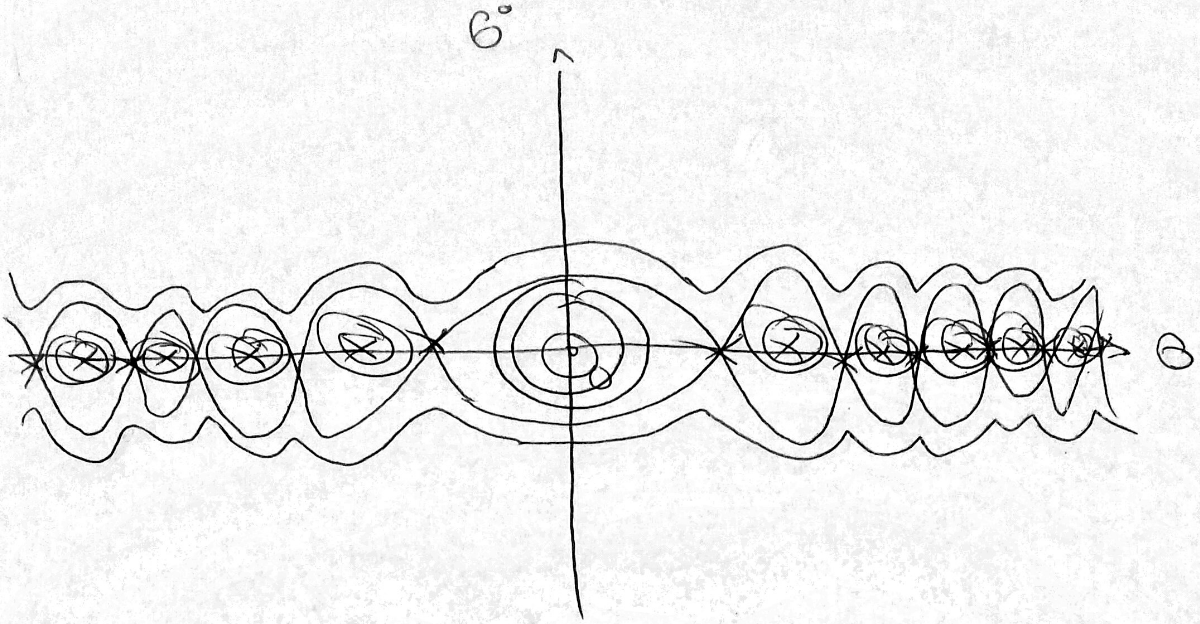
<u>Ιδιοτιμές του $J((2k+1)\pi,0)$:</u>

$\lambda^2-\omega^2=0$

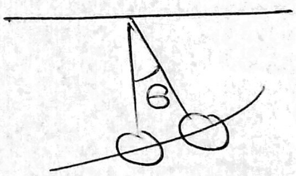
σαγματικά σημεία

Τροχιές καθορίζονται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας $\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta=0$ <- πολλαπλασιάζω με $\dot{\theta}$ και ολοκληρώνω

$$\frac{(\dot{\theta})^2}{2}+\omega^2\cos\theta=E$$



Το απλό εκκρεμές μόνο σε ειδικές περιπτώσεις εκτελεί ταλάντωση. Μόνο σε μικρές γωνίες γύρω από το σημείο ισορροπίας εκτελεί ταλάντωση. Σε γωνίες εκτελεί τροχιακή κίνηση και δεν έχει μετρήσιμη περίοδο.



$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$0 < \theta \leq 1$ ταλάντωση δηλαδή $\sin\theta \simeq \theta$

άρα $\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$

<u>Άσκηση:</u>

Να μελετήσετε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - c y \end{cases}$ που αντιστοιχεί στο απλό εκκρεμές με τριβές